

Massimi e minimi nel piano e nello spazio

LIMBIATE

La scelta

Le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore nell'interpretazione dei fenomeni naturali, in relazione al principio aristotelico secondo cui la natura sceglie sempre la via più facile: nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche criterio di massimo o di minimo.



Le api tutti i giorni costruiscono i loro favi seguendo una procedura matematica che ottimizza lo spazio anche se non conoscono le leggi matematiche.

La differenza significativa sta quindi nel perimetro complessivo della struttura. Le api scelgono quella più economica da un punto di vista della cera utilizzata

Finalità

- *Sviluppare la capacità di congetturare, astrarre e generalizzare partendo dal concreto*
- *Progettare, manipolare e costruire con materiali diversi*
- *Favorire un apprendimento cooperativo attraverso attività laboratoriali*
- *Acquisire un metodo scientifico laboratoriale per risolvere un problema*

Obiettivi

- *rafforzare il concetto di perimetro ed area*
- *riflettere sul concetto di isoperimetria ed equivalenza*
- *sottolineare il legame tra Algebra e Geometria, in particolare il ruolo dell'una come linguaggio descrittivo dell'altra*

Perimetro e area sono due

grandezze

→ possono essere misurate

diverse tra loro

→ ciascuna ha un proprio sistema di misura

esistono figure che hanno **uguale perimetro** (**isoperimetriche**), ma **diversa area**

esistono figure che hanno **uguale area** (**equiestese**), ma **diverso perimetro**



Esiste una relazione tra le due grandezze?

DIDONE

Un insospettabile problema matematico



Mito di DIDONE



Il primo problema di massimo nella storia si deve ad un'antica leggenda narrata anche nel I Libro dell'Eneide

*“Giunsero in questi luoghi, ov’or
sorger la gran cittade e l’alta rocca
della nuova Carthago, che dal fatto
Birsa nomassi, pe l’astuta merce
Che, per fondarla, fer di tanto sito
Quanto cerchiar di bue potesse un tergo”
[Eneide libro 1, versi 365-369]*



[Mito di Didone](#)

Per iniziare

“Come avrà fatto Didone a fondare la città di Cartagine?”.

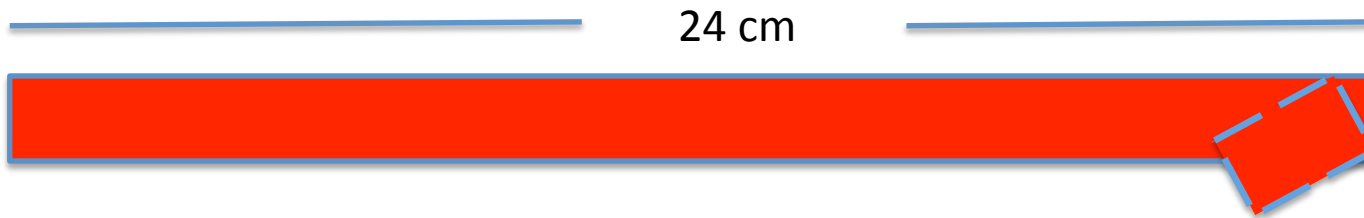
“Qual è la forma più conveniente da utilizzare come modello per la costruzione di Cartagine, sapendo che si ha a disposizione un perimetro ben definito?”.

Laboratorio 1: Quadrilateri isoperimetrici

QUADRILATERI ISOPERIMETRICI → **AREA MASSIMA**

Materiale:

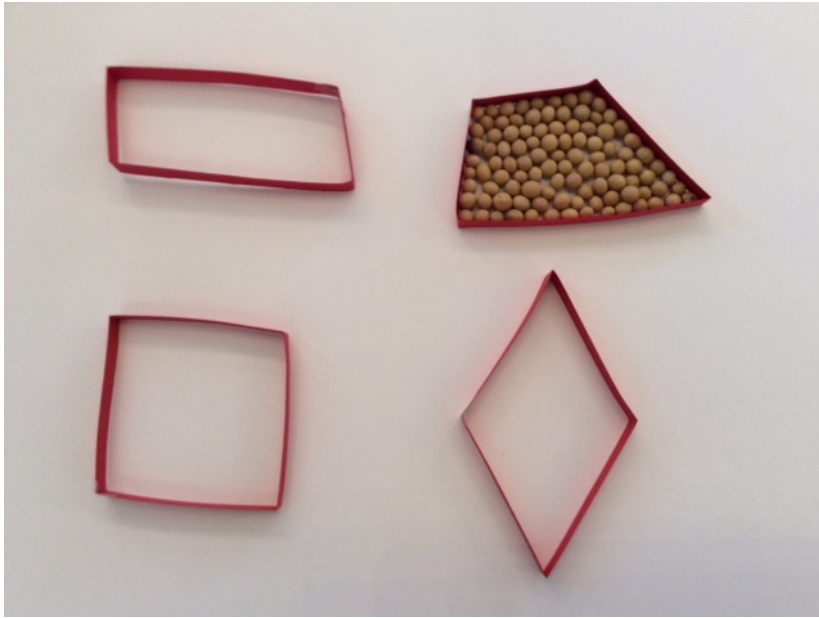
- strisce di cartoncino lunghe 25 cm (1cm serve per la piegatura) e alte 1,5 cm
- pallini, cubetti di colore diverso



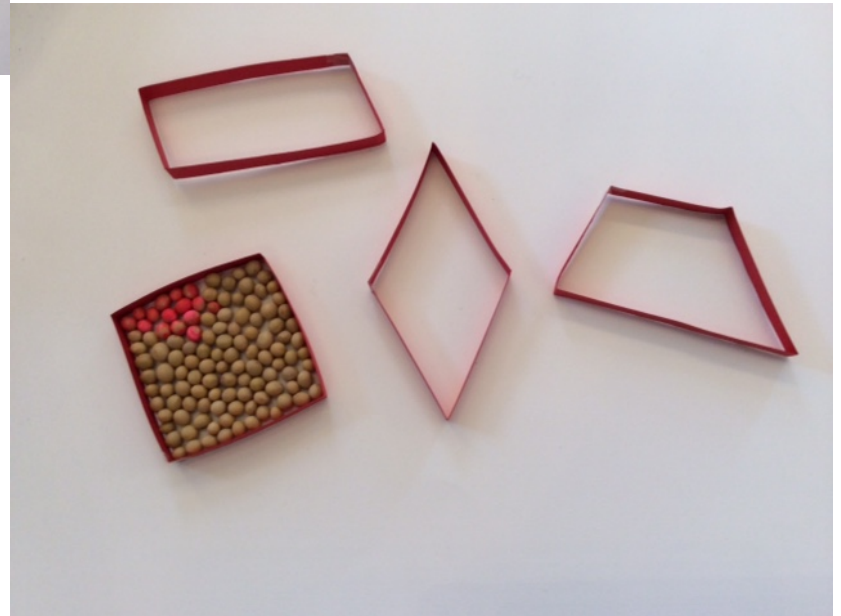
Far costruire diversi quadrilateri isoperimetrici e riempire con palline di diverso colore

Quale quadrilatero ha area massima?

Quadrilatero con area massima



Tra i quadrilateri il
QUADRATO ha area
MASSIMA

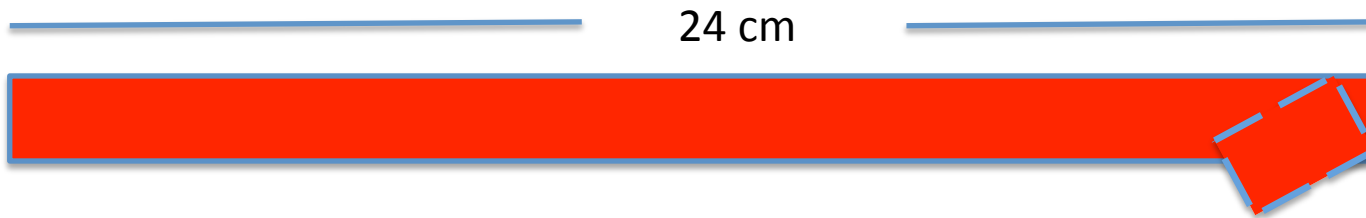


Laboratorio 2: Rettangoli isoperimetrici

RETTANGOLI ISOPERIMETRICI → **AREA MASSIMA**

Materiale:

- strisce di cartoncino lunghe 25 cm (1cm serve per la piegatura) e alte 1,5 cm
- pallini, cubetti di colore diverso



Far costruire diversi RETTANGOLI isoperimetrici e riempire con palline di diverso colore

Quale RETTANGOLO ha area massima?

Rettangoli isoperimetrici scuola primaria

Materiale:

- Consegnare un numero congruo di tessere quadrate (Quadratini di lato 1 cm o 1,5 cm)



Quadrato=Q (unità di misura per l'area)

lq = lato quadrato (unità di misura per il perimetro)

Perimetro = 24 lq

Tra i rettangoli isoperimetri chi ha

AREA MASSIMA?

Consegna: vedi scheda [consegna 1 primaria](#)

- Costruire rettangoli isoperimetrici
- Completare la tabella
- Fare osservazioni sulla tabella
- Indicare il rettangolo di area massima

Tabella Rettangoli isoperimetrici s. Elementare

Perimetro 24 lato quadretto lq			
Misura di due lati consecutivi in lato quadretto lq			
Primo lato	Secondo lato	Differenza tra le misure (lato maggiore meno quello minore)	Misura in quadretti dell'area
.....
.....



Quadrato=Q (unità di misura per l'area)

lq = lato quadrato (unità di misura per il perimetro)

Rettangoli isoperimetrici scuola primo grado

Perimetro = 24 cm

Tra i rettangoli isoperimetri chi ha

AREA MASSIMA?

Consegna: vedi Scheda1 alunni

Possibili costruzioni ed errori scuola primaria

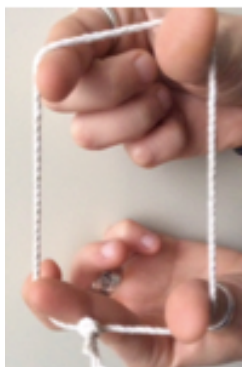
ESEMPI CORRETTI

ESEMPI ERRATI

Rettangoli isoperimetrici

Esperimento con il cordino

Cordino ben teso fra le due mani, avvicinando le dita e allontanando allo stesso tempo le mani si può osservare che si formano tanti rettangoli



Domande

- Che cosa cambia? (varianti)
- Che cosa non cambia? (invarianti)
- Tutti questi rettangoli hanno la stessa area?
- Esistono rettangoli la cui area è zero? (casi limite)

Rettangoli isoperimetrici scuola primo grado

Materiale:

- cartoncino per costruire i diversi rettangoli
- carta millimetrata

Per la scuola elementare quadratini

Perimetro = 24 cm

Tra i rettangoli isoperimetri chi ha

AREA MASSIMA?

[Scheda 1 alunni](#)

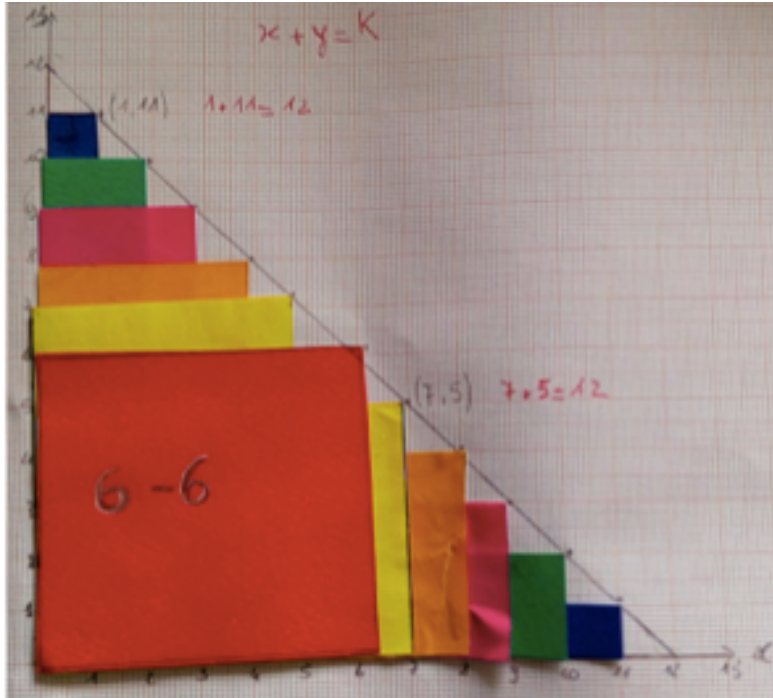
[Scheda 2 alunni](#)

Dai numeri al grafico

RETTANGOLI ISOPERIMETRICI



AREA MASSIMA



Tra i rettangoli isoperimetrici, il **quadrato** ha **area massima**

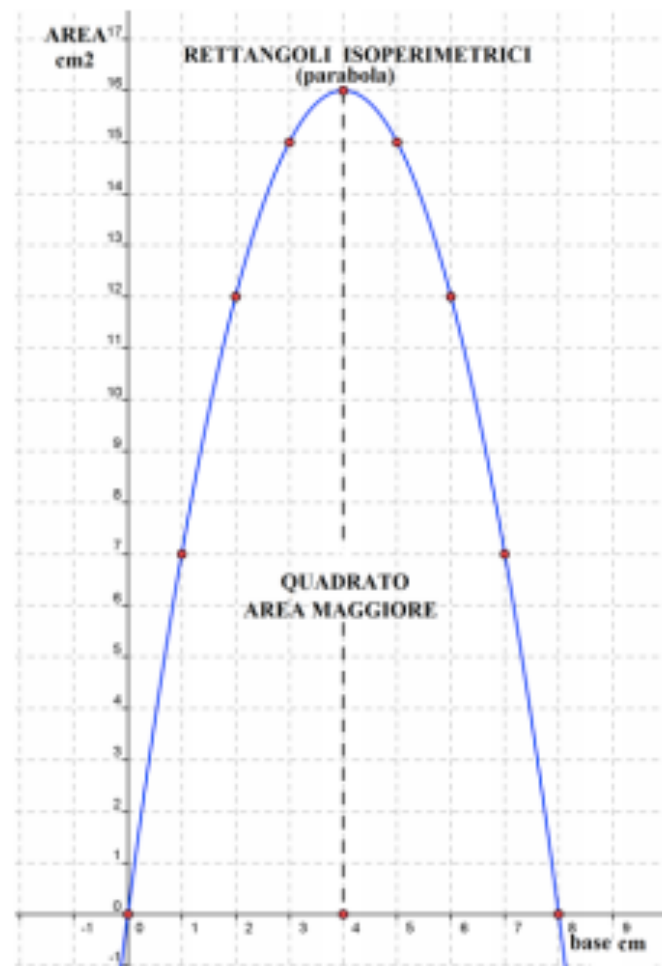
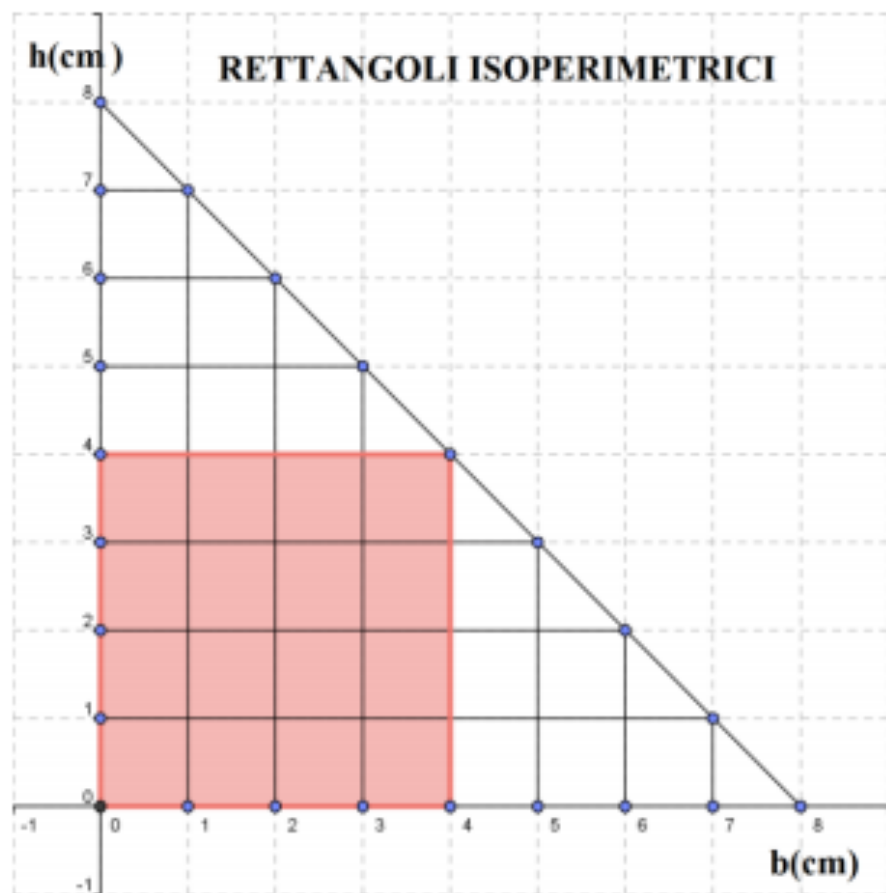
relazione algebrica $x + y = K$

funzione $y = k - x$

Dai numeri al grafico

Scheda 3 alunni

QUARILATERI ISOPERIMETRICI → **AREA MASSIMA**



Laboratorio 3: Triangoli isoperimetrici

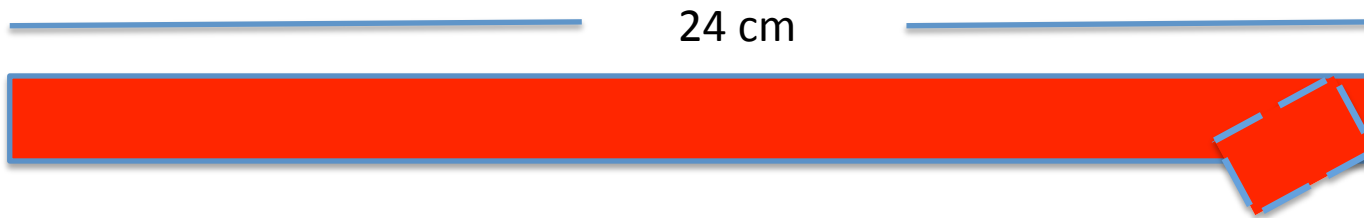
TRIANGOLI ISOPERIMETRICI



AREA MASSIMA

Materiale:

- strisce di cartoncino lunghe 25 cm (1cm serve per la piegatura) e alte 1,5 cm
- pallini, cubetti di colore diverso



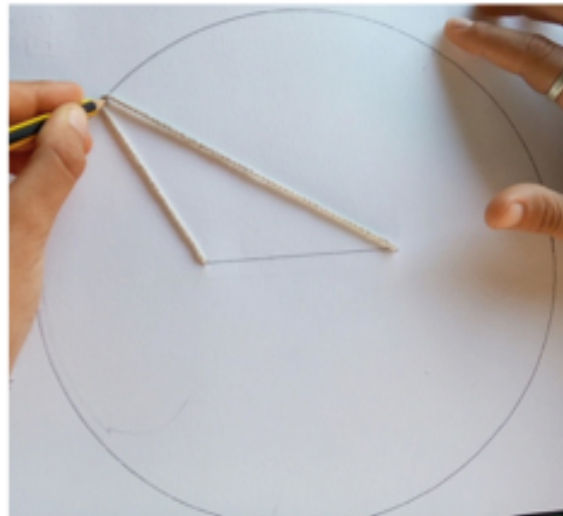
Far costruire diversi TRIANGOLI isoperimetrici e riempire con palline di diverso colore

Quale TRIANGOLO ha area massima?

Triangoli isoperimetrici

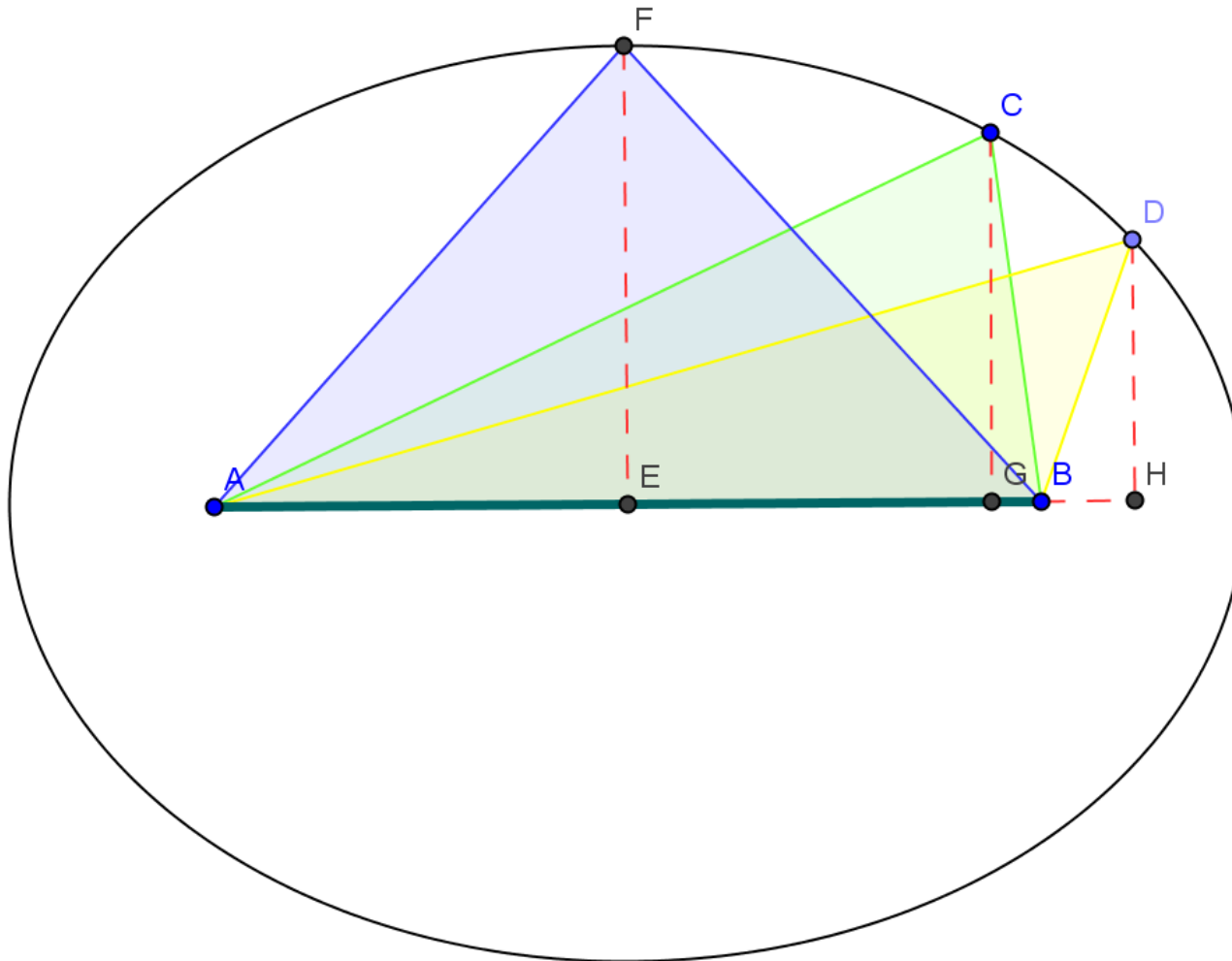
Scheda 4 alunni

TRIANGOLI ISOPERIMETRICI  **AREA MASSIMA**



TRIANGOLI ISOPERIMETRICI DI UGUAL BASE

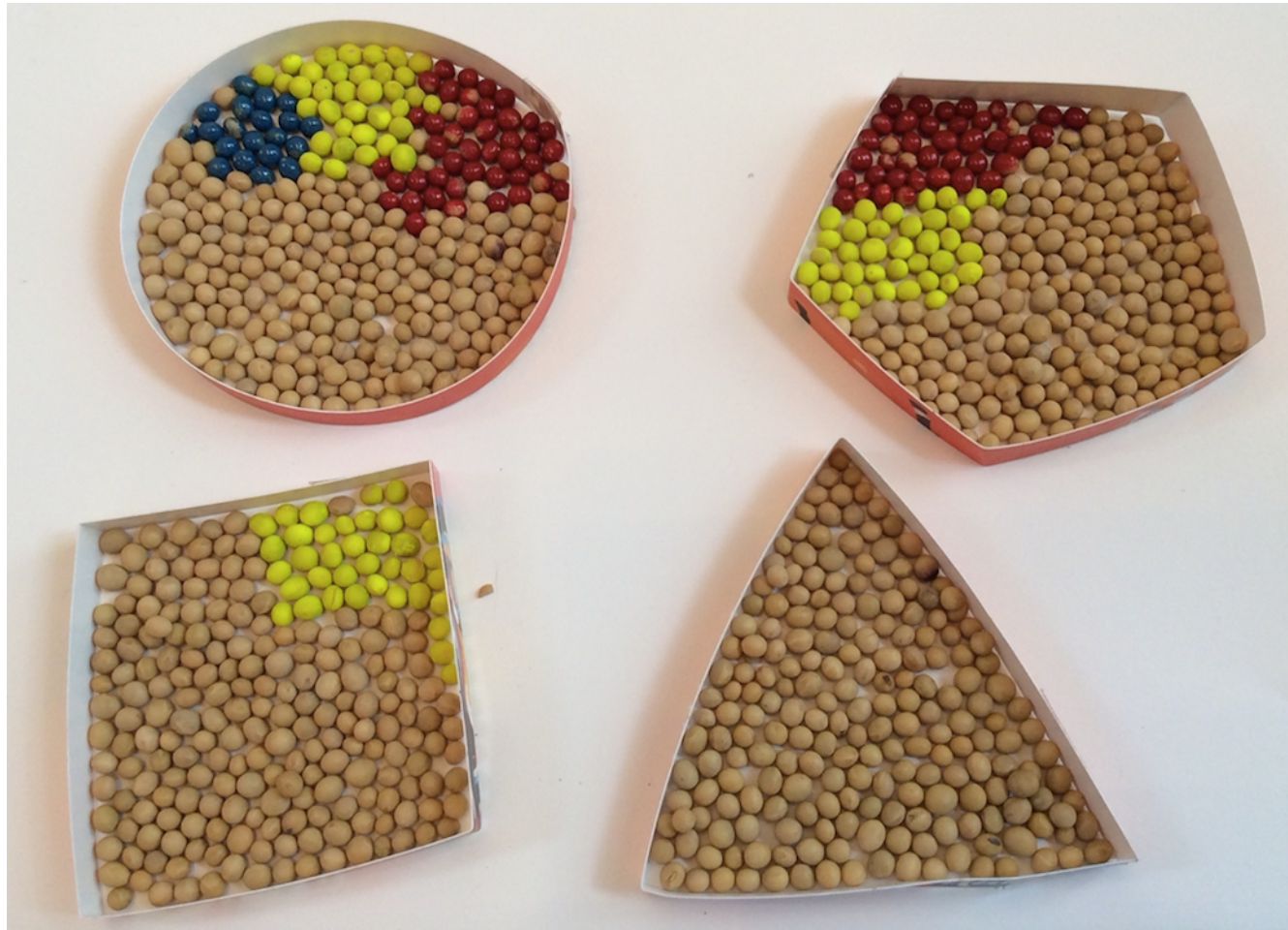
I vertici dei **triangoli isoperimetri** di ugual base si trovano su un'ellisse. Fra tutti questi triangoli quello di **area massima** e il **triangolo equilatero**



**Fra tutti i poligoni di un
numero fissato di lati di ugual
perimetro , il poligono
regolare è quello che ha area
massima**

Laboratorio 4: Poligoni regolari isoperimetrici

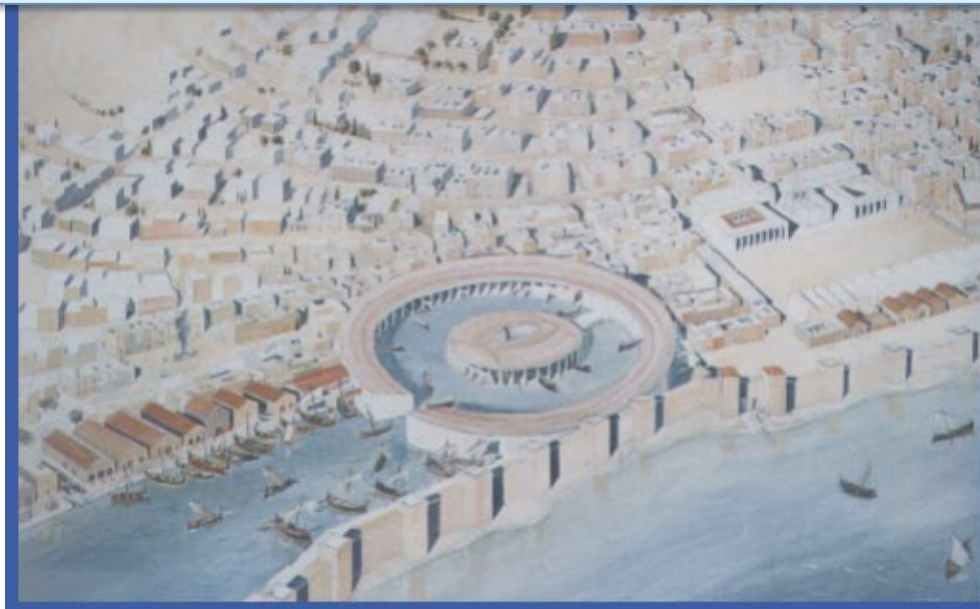
POLIGONI REGOLARI ISOPERIMETRICI  **AREA MASSIMA**



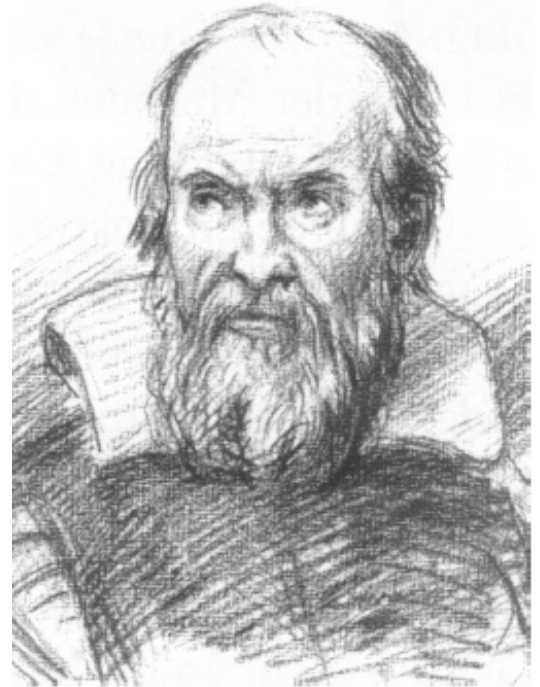
Conclusioni

L'astuzia di Didone consiste nell'applicare la proprietà secondo cui tra figure piane isoperimetriche, il cerchio è quella di area maggiore.

L'astuta Didone ha fondato Cartagine, delimitando una vasta zona, a forma di semicerchio affacciata sul mare, che aveva come diametro la linea di costa.

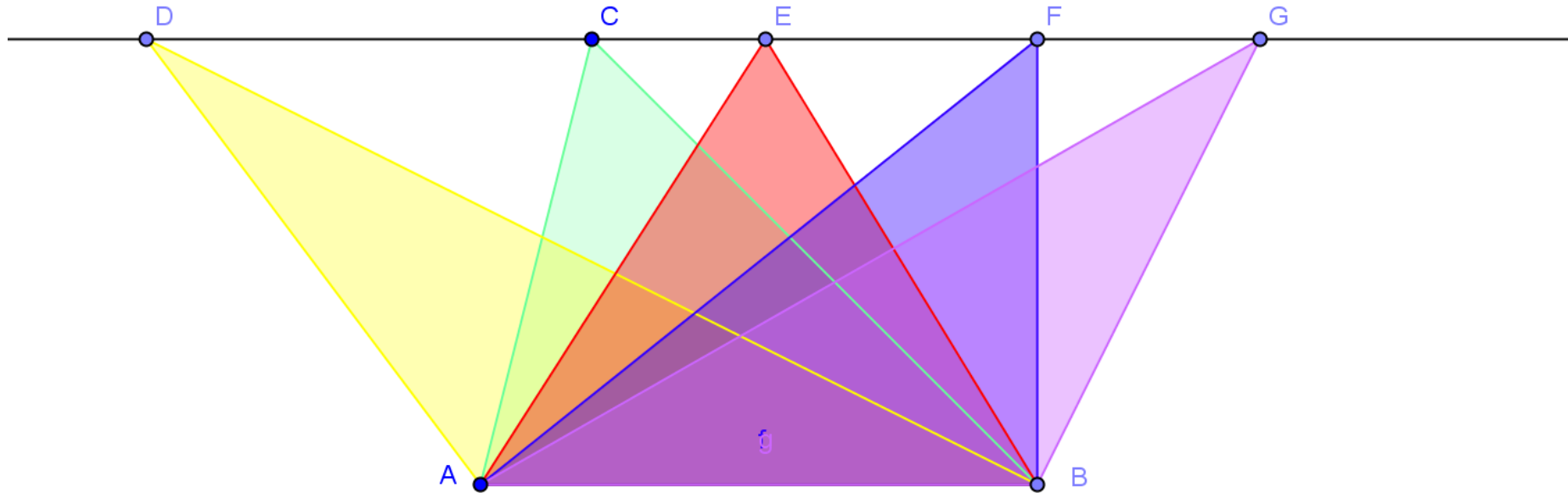


... ignorando che può essere un recinto eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello: il che accade non solamente tra le superfici irregolari, ma anche tra le regolari, delle quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di ugual circuito...



TRIANGOLI EQUIVALENTI DI UGUAL BASE

Fra i **triangoli equivalenti** di ugual base, il **triangolo equilatero** ha il **perimetro minimo**



Rettangoli equivalenti primaria

Tra i rettangoli equivalenti chi ha perimetro minimo?

Materiale:

- Consegnare un numero congruo di tessere quadrate
(Quadratini di lato 1 cm o 1,5 cm)



Quadrato = Q (unità di misura per l'area)

lq = lato quadratato (unità di misura per il perimetro)

Costruire diversi rettangoli equivalenti di Area 36 Q

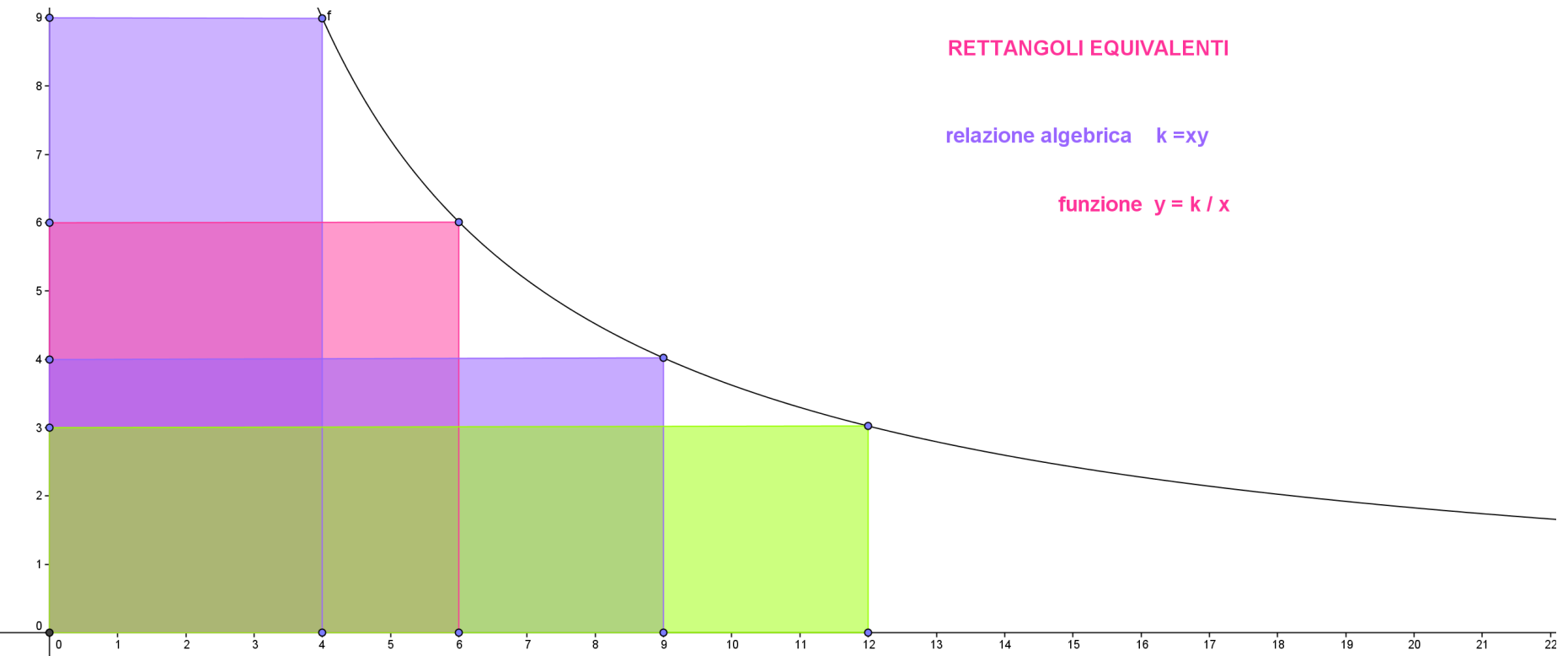
- Per ogni rettangolo registrare in tabella le misure, in lati quadrato di due lati consecutivi , la loro differenza e la misura in lati quadrato del perimetro

[illegible]

[illegible]

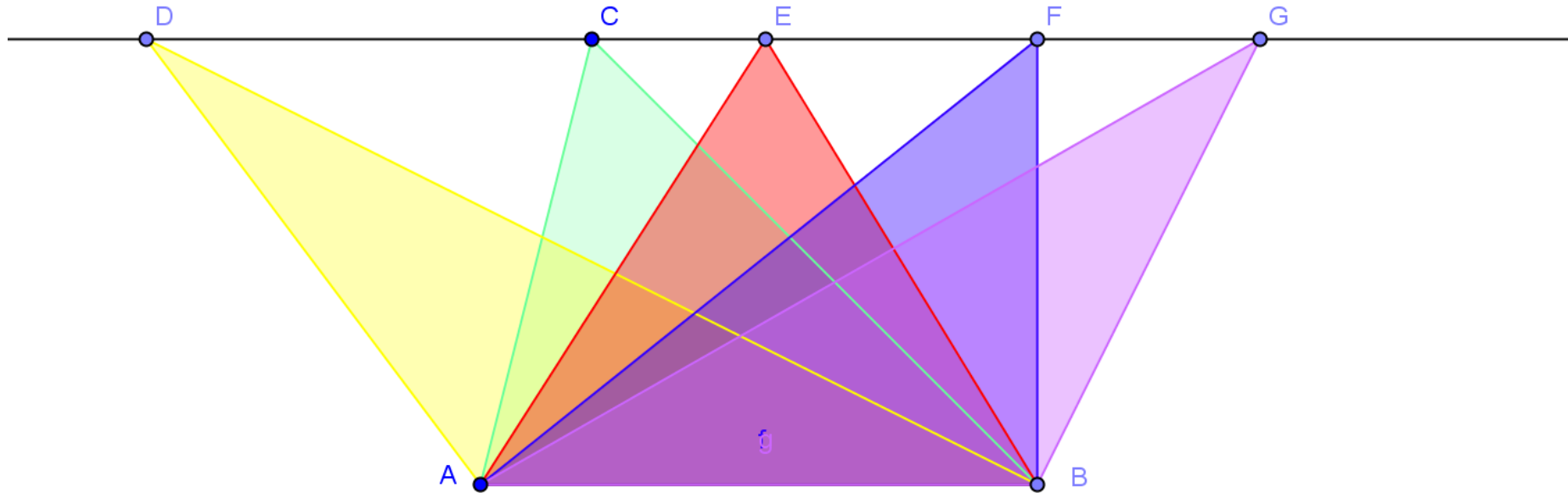
Rettangoli equivalenti

Tra i rettangoli equivalenti, il **quadrato** ha il **perimetro minimo**



TRIANGOLI EQUIVALENTI DI UGUAL BASE

Fra i **triangoli equivalenti** di ugual base, il **triangolo equilatero** ha il **perimetro minimo**
(uso del modellino)



Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual area, il poligono regolare è quello che ha perimetro minimo.



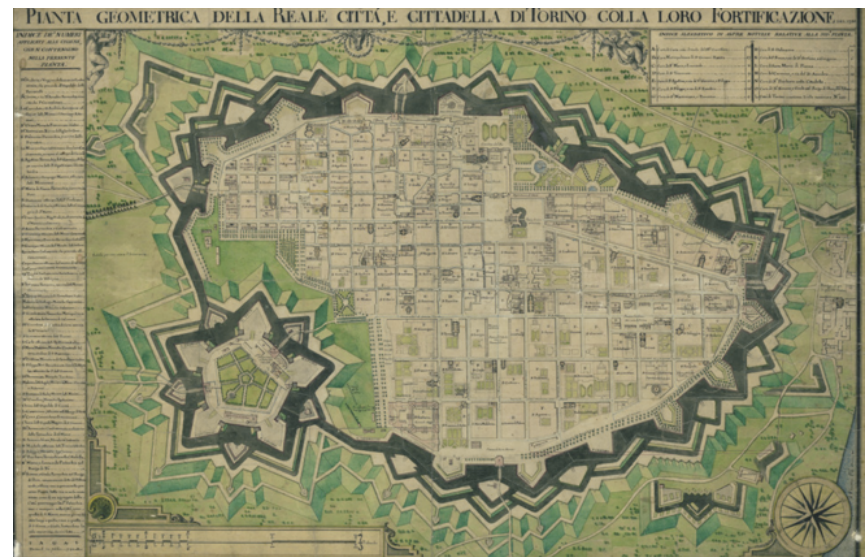
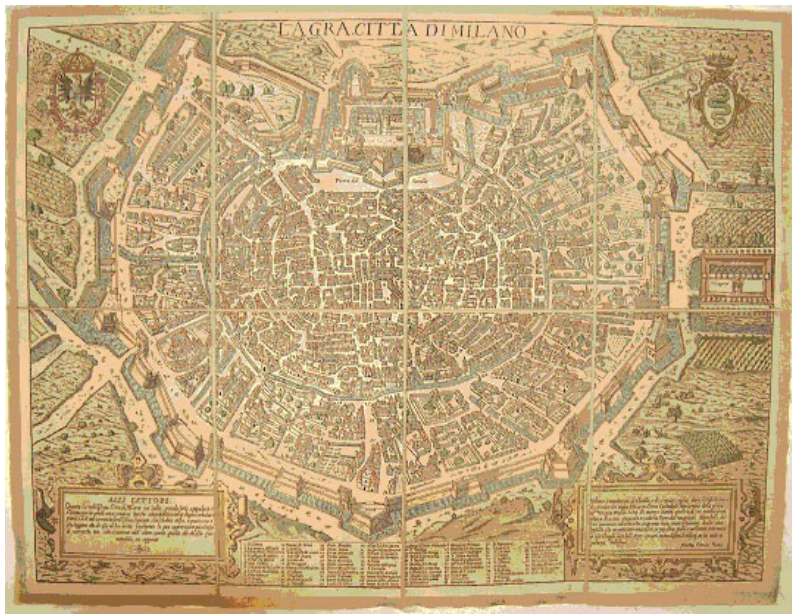
Fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati di ugual perimetro, il poligono regolare quello che ha area massima.

Tra i poligoni regolari di ugual area, il cerchio è quello che ha perimetro minimo



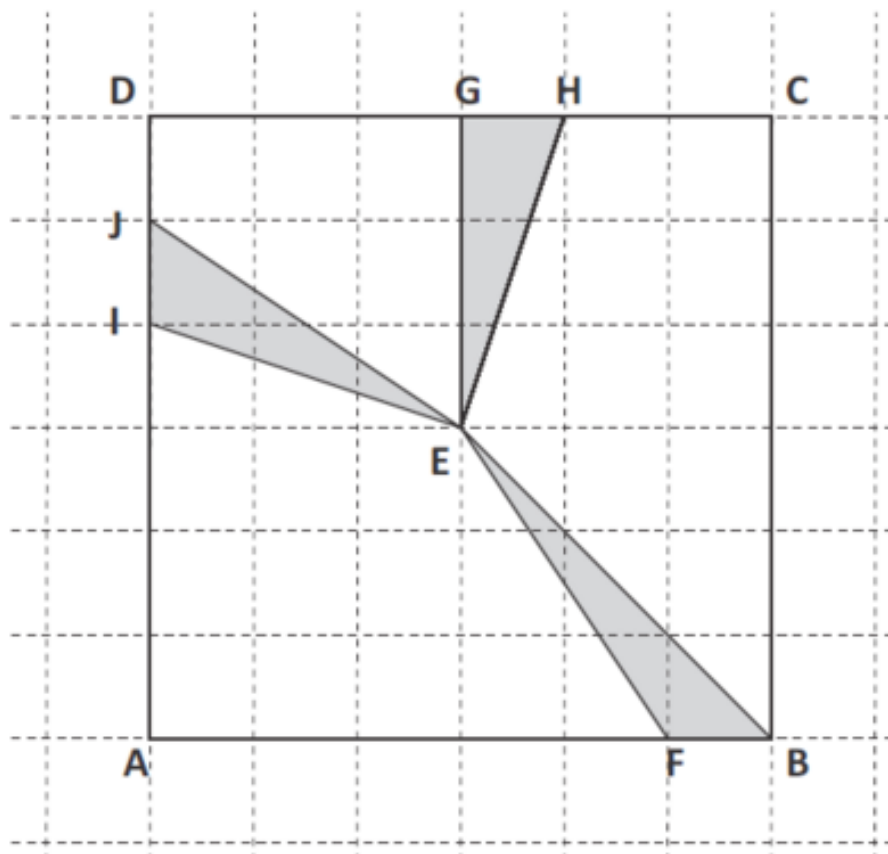
Tra i poligoni regolari di ugual perimetro, il cerchio è quello di area massima

Probabile applicazione nella costruzione delle città medioevali: a parità di area, cinta muraria circolare per ridurne la lunghezza e facilitare la costruzione, la sorveglianza e per ridurre i costi.



Bibliografia: Emma Castelnuovo “Figure Piane”

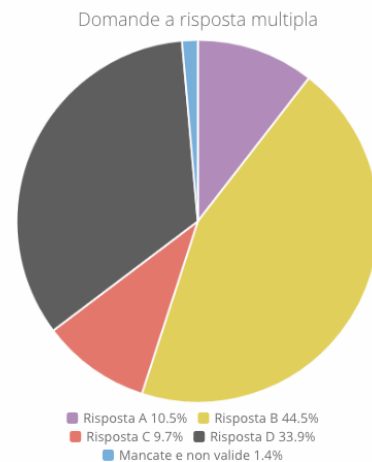
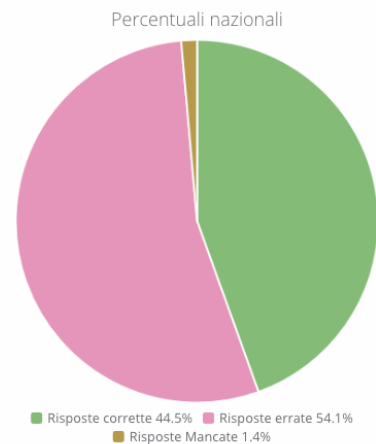
Osserva i triangoli nella seguente figura.



INVALSI 2014
III media

a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro
- B. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro
- C. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro
- D. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro



Osserva le seguenti figure.

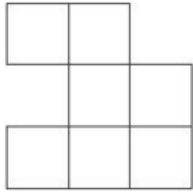


Figura 1

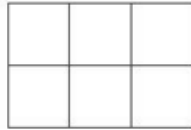


Figura 2

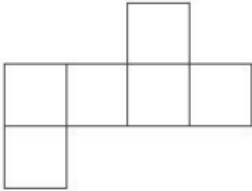


Figura 3

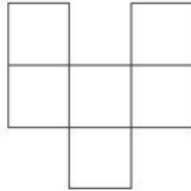


Figura 4

Quale di queste affermazioni è vera?

- A. ☐ Le figure 1, 3, 4 hanno la stessa area
- B. ☐ Le figure 3 e 4 hanno la stessa area e lo stesso perimetro
- C. ☐ Le figure 2, 3, 4 hanno lo stesso perimetro
- D. ☐ Tutte le figure hanno lo stesso perimetro

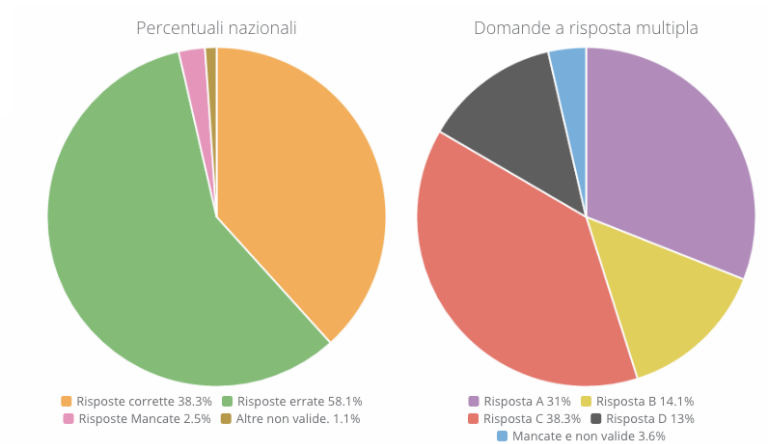
L'insegnante chiede ai suoi alunni: un triangolo equilatero e un quadrato possono avere lo stesso perimetro?

- Anna risponde: No. Infatti il triangolo ha tre lati e il quadrato ne ha quattro.
- Luigi risponde: No. Infatti un quadrato è sempre più grande di un triangolo.
- Ugo risponde: Sì. Quando succede i lati del triangolo sono più lunghi di quelli del quadrato.
- Fabiana risponde: Sì. Quando succede il lato del triangolo è uguale a quello del quadrato.

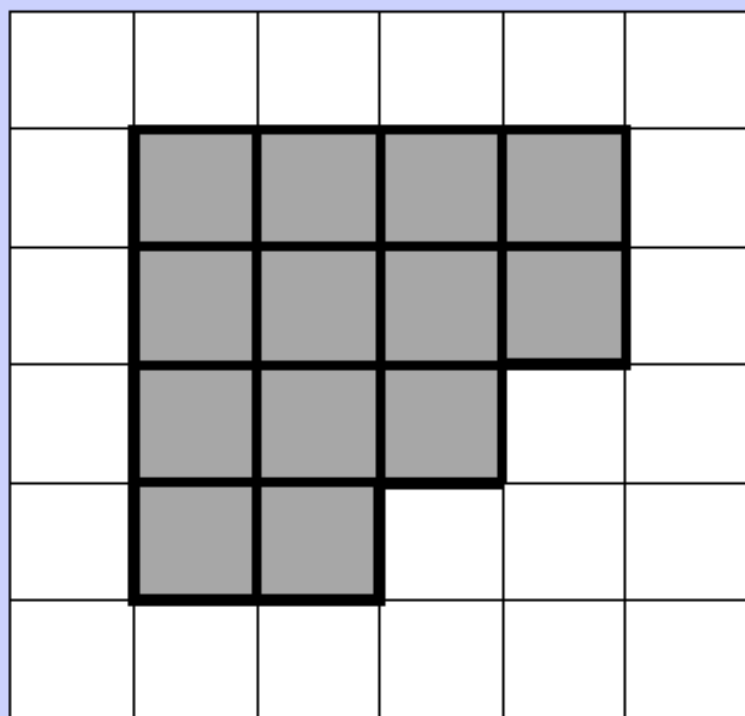
Chi ha ragione?

- A. ☐ Anna
- B. ☐ Luigi
- C. ☐ Ugo
- D. ☐ Fabiana

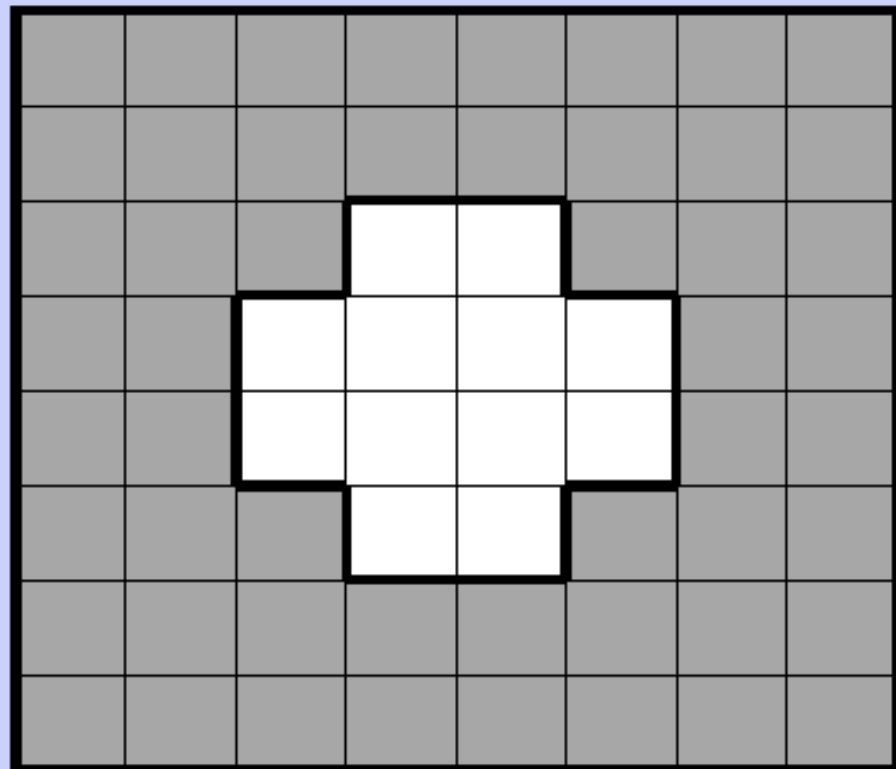
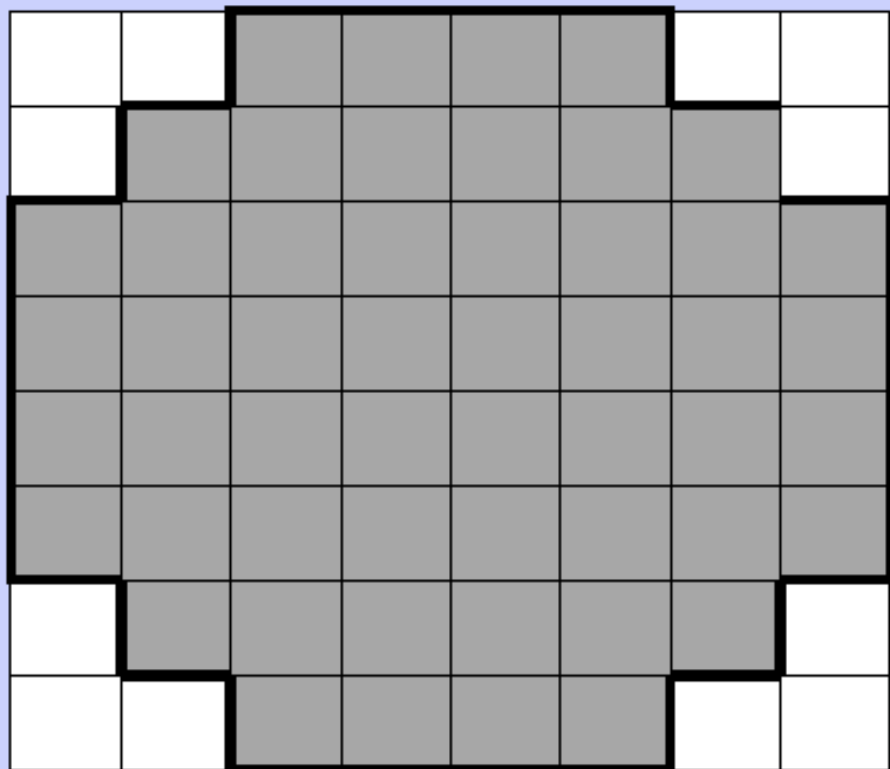
INVALSI 2012
I media



Da un poligono tante figure



domande	riposte corrette
Quanti lati ha il poligono?	95 %
Il suo nome è...	50 %
Quanti angoli?	85 %
Quanti angoli sono retti?	40 %
Gli altri due angoli sono	25 %



domande	risposte corrette
Quale delle due figure è la più estesa?	85 %
Il contorno della prima figura da quanti lq è formata	50 %
E quello della seconda figura?	25 %