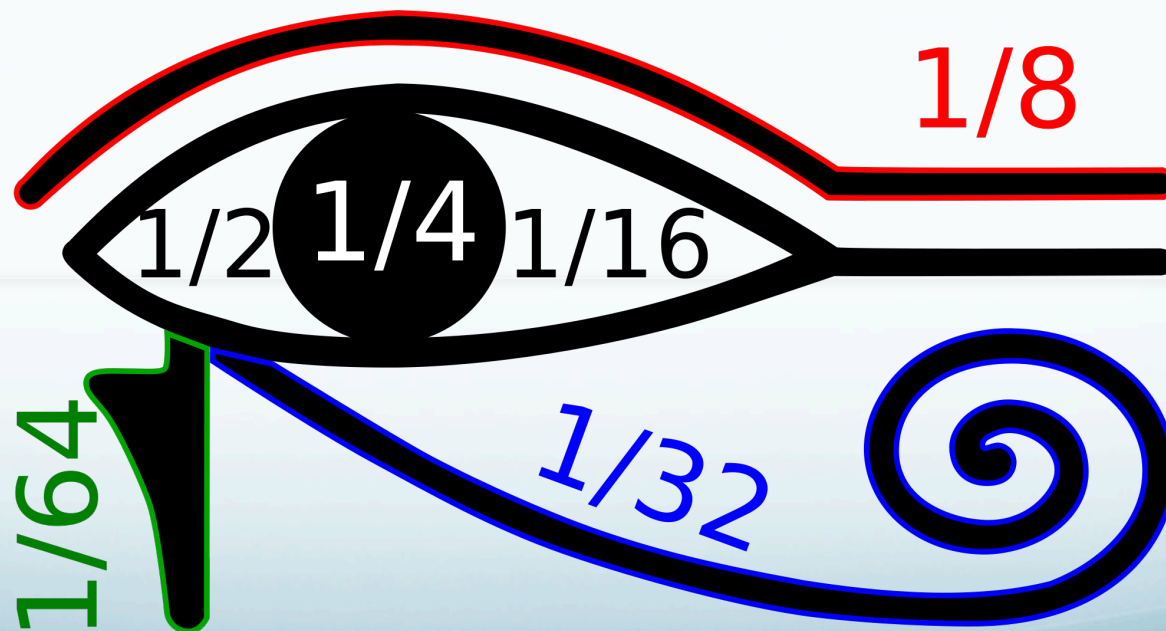


# LE FRAZIONI



# Frazioni complesse?

E' stato dimostrato che i ragazzi hanno sorprendenti e significative difficoltà ad apprendere e, di conseguenza, applicare, i concetti legati ai numeri razionali.

Come se non si accorgessero del loro utilizzo, a questo punto inconsapevole, nella vita quotidiana

Pensiamo alla lettura dell'orologio, sconti, percentuali, dosaggi farmaci, etc

# Perché questa difficoltà? esempio con **frazione**, **numero decimale** e **numero razionale**

Proviamo ad indagare quali sono gli ostacoli cognitivi

- C'è una grande differenza tra una frazione e un numero razionale?

- $\frac{2}{3}$  e  $0,6\overline{}$  sono, uno una frazione, e l'altro un

numero decimale periodico semplice, quello che sembra difficile per gli allievi è capire che sono due rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto.

# Quali razionali?

Si pensa che l'immagine della torta divisa in tante fette "uguali" sia efficace, perché fa capire il rapporto tra l'intero e le sue parti e si può passare subito alla definizione di frazione.

Ma quella non è l'unica definizione di frazione;

Infatti, vi sono diverse rappresentazioni

# Quante rappresentazioni di numeri razionali?

- **Come parti di un intero** *parte/tutto* legato alla partizione
- Decimali
- **Rapporto** una parte di acqua e quattro parti di succo significa un rapporto 1 : 4 per un totale di 5 parti
- **Quoziente** è una divisione espressa ma non eseguita
- **Operatore** es i  $\frac{3}{5}$  di una classe di 20 alunni
- **Misura** di quantità discrete o continue
- E altro ancora...

# Quale approccio?

L'approccio al significato di frazione nei diversi Paesi sembra avere una caratteristica comune: dividere una unità concreta in parti uguali.

Idea intuitiva e facilmente modellizzabile nel contesto di vita quotidiana (prendere metà mela ripartire un certo numero di cioccolatini fra amici).



# Quale modello?

Modelli generalmente utilizzati dagli insegnanti

*Unità* modello nel continuo (torta, pizza, cioccolata)

o

*Unità* modello nel discreto (giocattoli, caramelle....)

di cui si chiede la distribuzione tra amici

# Modello torta?

Si pensa che l'immagine della torta divisa in tante fette "uguali" sia efficace, perché fa capire il rapporto tra l'intero e le sue parti e si può passare subito alla definizione di frazione.

Ma cosa succede quando per rappresentare la frazione  $\frac{5}{4}$  si usa il modello torta?



Martha Isabel Fandiño Pinilla nel testo "Le frazioni aspetti concettuali e didattici"  
fa le seguente asserzione:

*"I numeri frazionari non esistono nel sapere accademico, al loro posto esistono i numeri razionali, definiti come classe di equivalenza. Nel sapere scolastico le frazioni "riempiono i libri di testo", ma cosa sono le "frazioni"?*

*Possono essere pensate come l'insieme delle diverse rappresentazioni*

- relazione parte/tutto*
- rapporto (scale, percentuali, proporzionalità)*
- divisione ( numeri decimali)*
- numero*
- espressione della probabilità.*
- misura*

*Una volta stabilito che i punti precedenti costituiscono un sapere da insegnare sorge il problema: come insegnare questi concetti?*

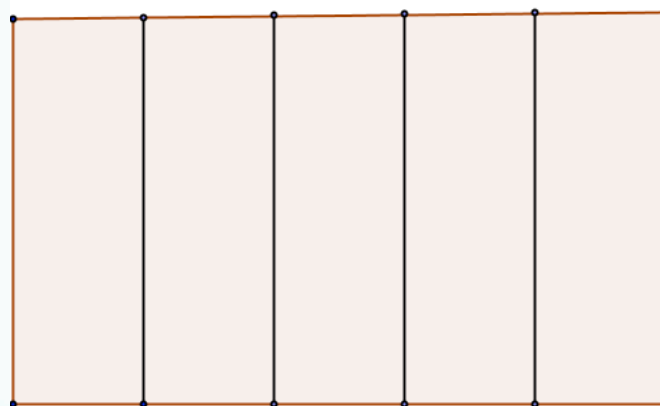
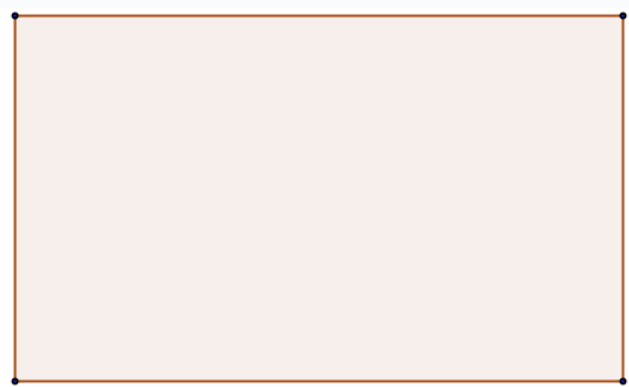
*Ma soprattutto, come far sì che gli studenti apprendano?"*

# La frazione come parte di un tutto a volte continuo a volte discreto

Nel linguaggio comune la parola “frazione” indica generalmente una parte di un tutto (frazionare) mentre nel linguaggio matematico il termine “frazione” è applicabile solo alle diverse parti di una grandezza ottenute dividendo quella grandezza in parti uguali.

# La frazione come parte di un tutto a volte continuo a volte discreto

Consideriamo un intero e dividiamo in 5 parti **uguali** (siamo nel continuo)



Ognuna di queste parti rappresenta  $\frac{1}{5}$  del rettangolo

# La frazione come parte di un tutto a volte continuo a volte discreto

Fino a qui tutto bene; possiamo anche definire  $m/n$  parti del rettangolo con  $m < n$

Il problema si complica quando vogliamo definire la frazione  $7/5$

Cosa significa?

Quindi dobbiamo considerare due rettangoli; ma allora l'unità da dividere è una o due?

# La frazione come parte di un tutto a volte continuo a volte discreto

Mettiamoci ora nel caso discreto

Per intero consideriamo 15 biciclette

La frazione impropria rappresenta la stessa difficoltà del caso precedente

E in più se vogliamo calcolare i  $\frac{3}{7}$  come si fa a dividere 15 biciclette in 7 parti uguali?

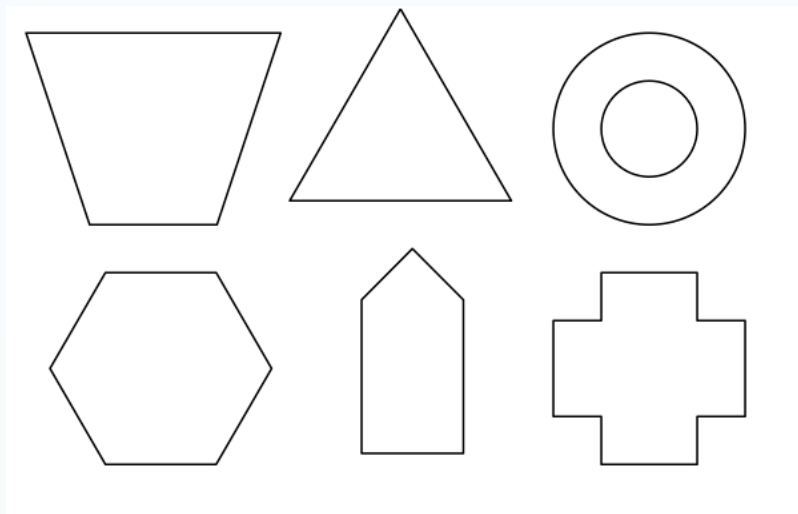
# Problema dell'uguale

Per far comprendere che le due figure rappresentano la stessa unità frazionaria si deve essere certi che i bambini abbiano ben chiaro il concetto di “equiesteso”

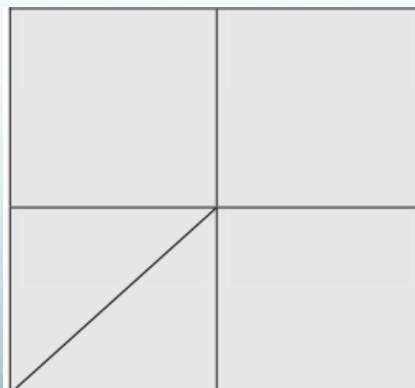


e usando sempre la terminologia corretta si possono anche introdurre figure come le seguenti

# Problema dell'uguale



Proponendo di trovare strategie adeguate per frazionarle senza far dividere sempre a metà altrimenti si potrebbe incorrere nell'errore seguente per dividere un quadrato in 5 parti uguali



# Frazione come quoziente

E' possibile vedere la frazione  $m/n$  come divisione magari anche non effettuata.

Ma allora si cambia prospettiva cioè la frazione non è più quante parti prendiamo (**m**) dopo aver diviso il tutto in **n** parti  
In questo caso abbiamo proprio il concetto di divisione cioè quante parti di **m** distribuisco a ciascun **n**

**10 caramelle e 5 bambini: quante caramelle posso dare a ciascun bambino**



# Frazione sulla retta orientata

Sui libri di testo o nelle attività in aula la seguente proposta “porre  $\frac{3}{4}$  sulla retta numerica”.

Rispondere a questa domanda significa applicare una relazione d'ordine in  $\mathbb{Q}^a$

Per collegare questa attività con l'idea di frazione parte/tutto è bene all'inizio che ai bambini venga richiesto di collocare sulla retta frazioni con lo stesso denominatore.

Successivamente frazioni con denominatori diversi ma comunque equivalenti alle frazioni usate precedentemente.

# **COSA CI DICONO LE PROVE NAZIONALI?**

In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.




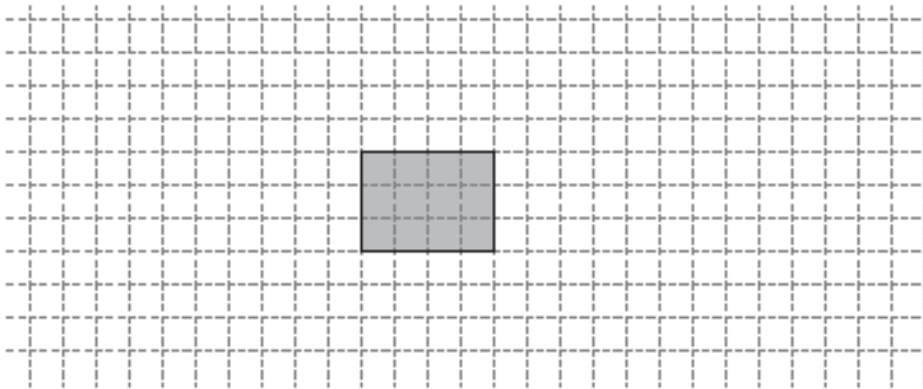

A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

- A. ☐ Un settimo
- B. ☐ Un ottavo
- C. ☐ Un quindicesimo
- D. ☐ Un sedicesimo

### RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Manc Risp	Opzioni			
		A	B	C	D
D25	3,4	35,3	8,0	11,3	42,0

SNV 08  
2013

Domanda	Commento						
<p>D11. Il rettangolo che vedi di seguito corrisponde a <math>\frac{1}{4}</math> di una figura.</p>  <p>Disegna nello spazio qui sotto una delle possibili figure da cui il rettangolo è stato ritagliato.</p> 	<p><b>Risposta corretta:</b> è corretta qualsiasi figura che corrisponda ai <math>\frac{4}{4}</math>, della figura iniziale e che la inglobi.</p>  <p>In questa prova è richiesto il lavoro inverso a ciò che si trova solitamente nei testi; occorre consapevolezza rispetto al significato delle frazioni e la capacità di pensare un percorso a ritroso.</p> <p><b>RISULTATI DEL CAMPIONE</b></p> <table><tr><th>errata</th><th>corretta</th><th>Non risponde</th></tr><tr><td>48,3</td><td>40,3</td><td>10,8</td></tr></table>	errata	corretta	Non risponde	48,3	40,3	10,8
errata	corretta	Non risponde					
48,3	40,3	10,8					

Il completamento all'unità costituisce una difficoltà per il 48,3% e il 10,8% non è in grado di fornire una risposta.

Il concetto di frazione si intreccia con la equiscomposizione di figure, viene chiesto di trovare il tutto conoscendo una parte e

non l'inverso

D20. La figura che vedi di seguito corrisponde ai  $\frac{3}{4}$  di una figura più grande.

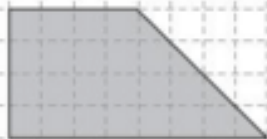


Disegna due delle figure, una nello spazio A e una nello spazio B, da cui la figura che vedi sopra può essere stata ritagliata.

A



B



SNV 06  
2012

Il concetto di frazione si intreccia con la equiscomposizione di figure, viene chiesto di trovare il tutto conoscendo una parte e non l'inverso. È anche importante perché la soluzione non è unica

Marco vuole preparare una torta al cioccolato per il suo compleanno. La ricetta dice che occorrono 600 g di cioccolato. Al supermercato vendono tavolette di cioccolata da 250 g l'una.

- a. Qual è il numero minimo di tavolette di cioccolata che Marco deve comprare?

Risposta: .....

- b. Se ogni tavoletta è formata da 10 quadretti, quanti quadretti di cioccolata servono a Marco per preparare la torta?



Risposta: .....

- c. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

.....

## RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D17a	36,2	58,6	5,0
D17b	70,9	18,7	10,1
D17c	68,3	13,5	17,6

Per il 70,9% è difficile trovare una frazione che sia maggiore dell'unità di misura

**D27.**  $\frac{4}{8}$  e 0,5 indicano la stessa quantità?

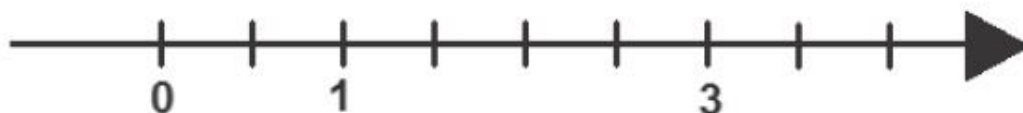
- ☐ A. No, perché  $\frac{4}{8}$  indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di  $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Sì, perché valgono entrambi la metà di un intero

SNV 05  
2010



**D8. Posiziona sulla retta i seguenti numeri:**

2      2,5       $\frac{3}{2}$        $\frac{5}{10}$



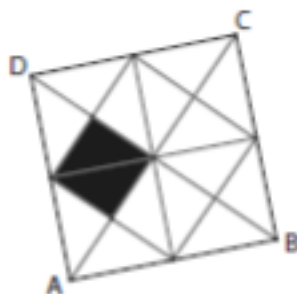
Lo studente deve trasformare le frazioni in numeri decimali o viceversa e collocarli sulla retta numerica. L'uso della retta dei numeri come modello di rappresentazione dei numeri naturali viene in genere introdotto alla scuola primaria nei primi anni e dovrebbe continuare quando si introducono i razionali. Probabilmente le difficoltà che gli studenti possono incontrare riguardano la collocazione sulla retta di  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{5}{10}$ .

SNV 06  
2011



## Domanda

D26. Quale frazione dell'area del quadrato ABCD rappresenta la parte colorata?



- A. ☐  $\frac{1}{4}$   
 B. ☐  $\frac{1}{6}$   
 C. ☐  $\frac{1}{8}$   
 D. ☐  $\frac{1}{12}$

## Caratteristiche

### AMBITO PREVALENTE

Numeri

### SCOPO DELLA DOMANDA

Individuare, tra quelle date, la frazione rappresentante la parte rispetto al tutto.

### PROCESSO PREVALENTE

Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure.

### Indicazioni nazionali

*Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti.*

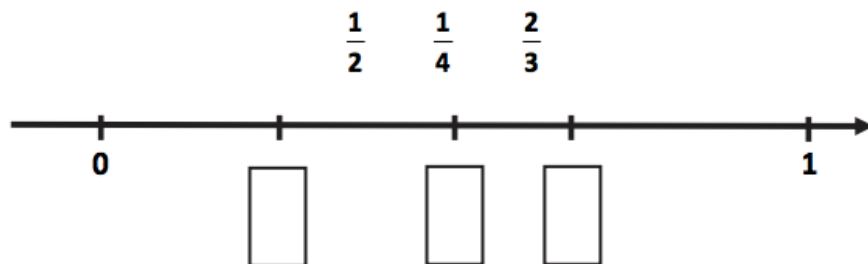
### RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Manc. Risp.	Opzioni			
		A	B	C	D
D26	2,5	22,2	7,1	52,8	15,4

**Macro processo:** Utilizzare

In concetto di frazione si intreccia con la equiscomposizione di figure, viene chiesto di trovare la parte del tutto

D12. Scrivi nei riquadri i seguenti numeri, posizionandoli correttamente sulla retta.



### Caratteristiche

#### AMBITO PREVALENTE

Numeri

#### SCOPO DELLA DOMANDA

Posizionare frazioni sulla retta ordinandole

#### PROCESSO PREVALENTE

Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra

#### Indicazioni nazionali

*Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta*

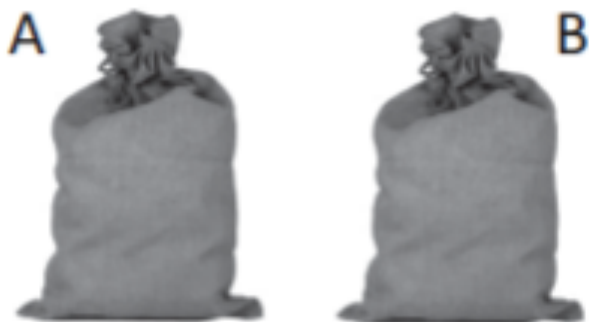
#### RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Mancata risposta	Errata	Corretta
D12	6,2	59,6	34,2

Macro processo: Utilizzare

SNV 06  
2013

Nel sacchetto A ci sono 4 palline rosse e 8 nere mentre nel sacchetto B ci sono 4 palline rosse e 6 nere.



- a. Completa correttamente la seguente frase inserendo al posto dei puntini una sola delle seguenti parole:

più	meno	ugualmente
-----	------	------------

Estrarre una pallina rossa dal sacchetto A è ..... probabile che estrarre una pallina rossa dal sacchetto B.

- b. Giovanni distribuisce fra i due sacchetti altre 6 palline rosse in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa sia la stessa per entrambi i sacchetti. Quante palline rosse ha aggiunto Giovanni in ciascuno dei due sacchetti?

Risposta: Sacchetto A: \_\_\_\_\_

Sacchetto B: \_\_\_\_\_

SNV 08  
2013

### RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Mancata risposta	Errata	Corretta
D4_a	0,8	30,8	68,4
D4_b	3,9	53,9	42,3

Nel primo item deve valutare una probabilità semplice, mentre nel secondo item deve modificare due rapporti in modo da renderli equivalenti.

# Cosa dice la ricerca didattica

La ricerca didattica ha identificato e descritto numerose difficoltà legate all'apprendimento del significato di frazione

- Gestire il significato di “uguale”
- Passare da una frazione all'unità che l'ha generata
- Gestire frazioni equivalenti
- Ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali
- Gestire le operazioni tra le frazioni

# **COSA CI DICONO LE INDICAZIONI NAZIONALI?**

# TRAGUARDI PER LO SVILUPPO DELLE COMPETENZE

## **Al termine della scuola primaria**

- Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).

## **Al termine della scuola secondaria di primo grado**

- L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.

# I DIVERSI REGISTRI SEMIOTICI:

*Frazione come.....*

- **Parte di un tutto (continuo/discreto)**
- **Quoziente**
- **Rapporto**
- **Operatore**
- **Grandezze dimensionabili**
- **Probabilità**
- **Punteggi**
- **Numero razionale**
- **Punto di una retta orientata**
- **Percentuale**
- **Linguaggio quotidiano**

# DOVE SI RISCONTRANO DIFFICOLTA?

- **Nell'ordinare le frazioni ed i numeri scritti in forma decimale**
- **Nelle operazioni tra frazioni e numeri decimali**
- **Nel gestire l'aggettivo "uguale"**
- **Nel gestire le equivalenze**
- **Nel gestire la riduzione ai minimi termini**
- **Nel gestire figure non standard**
- **Nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata**



# Attività proposte

Introduzione al concetto di frazione: **Origami “Pesce e scoglio” di Maria Luisa Spreafico (Università di Torino) modello di Fumiaki Shingu**

Introduzione alle frazioni sulla retta: **Stendiamo il bucato**

Frazioni di figure equiestese: **Giochiamo a carte con le frazioni**